



*Cette épreuve comporte deux pages*

**EXERCICE 1**

1) On considère l'intégrale  $\omega(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos(\beta x) dx$ .

Pour quelles valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  cette intégrale converge-t-elle ? Pour ces valeurs trouvées, calculer cette intégrale. Démontrer que, quel que soit le nombre réel  $a$  on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{\cosh(x)} dx = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + a^2}$$

2) Pour  $n$  entier naturel, on pose  $u_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{4k+1}$ . Etudier la nature de la série numérique  $\sum_{n \geq 0} u_n$ .

Calculer la somme en cas de convergence.

**EXERCICE 2**

On considère la fonction  $f$  de la variable réelle telle que  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \text{Arc tan} \left( \frac{x}{n^2 + x^2} \right)$ .

1) Quel est l'ensemble de définition  $D$  de  $f$  ? Etudier la parité de  $f$ .

2) Démontrer que  $f$  est continue sur  $D$ .

3) On pose  $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \text{Arc tan} \left( \frac{x}{k^2 + x^2} \right)$ .

Montrer que  $R_n(2n) \geq n \text{Arctan} \left( \frac{1}{4n} \right)$ . Que peut-on en déduire pour la convergence uniforme

éventuelle sur  $\mathbb{R}$  de la série de fonctions de terme général  $u_n : x \mapsto \text{Arctan} \frac{x}{n^2 + x^2}$  ?

4) Démontrer que  $\forall u > 0, \forall v \in [0, u]$  on a  $\frac{v}{u} \text{Arctan} u \leq \text{Arctan} v \leq v$

a) Etablir que  $\forall x \in ]0, +\infty[$  on a :  $\int_1^{+\infty} \text{Arctan} \left( \frac{x}{x^2 + t^2} \right) dt \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2}$ .

b) En déduire que  $x \text{Arc tan} \frac{1}{x} \text{Arc tan} x \leq f(x) \leq \frac{\pi}{2}$  pour tout  $x > 0$  et que  $f$  admet une limite finie

en  $+\infty$   $\left( \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$  que l'on déterminera. Déduisez-en le résultat de la question 3).

5)  $f$  est-elle de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  ?

## PROBLEME

1) On considère la série entière réelle  $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{4n^2 - 1}$ .

a) Déterminer son rayon de convergence  $R$ .

b) Démontrer que cette série entière converge uniformément sur le segment  $[-R ; R]$  et calculer sa somme.

2) Soit  $f$  la fonction réelle de la variable réelle définie sur l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \left| \sin \frac{x}{2} \right|.$$

Démontrer qu'il existe une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de nombres réels telle que, si pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $w_n = a_n \cos nx$ , la série de fonctions de terme général  $w_n$  converge absolument et

uniformément sur  $\mathbb{R}$ , et a pour somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = f$ . Calculer  $a_n$  en fonction de  $n$ .

3) Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels tels  $a < b$ , et soit  $h$  une fonction réelle de la variable réelle, de classe  $C^1$  sur le segment  $[a, b]$ .

$$\text{Pour tout réel } \lambda \text{ posons } J(\lambda) = \int_a^b h(t) \left| \sin \frac{\lambda t}{2} \right| dt.$$

a) Démontrer que, lorsque  $\lambda \rightarrow +\infty$ , l'intégrale  $I(\lambda) = \int_a^b h(t) \cos(\lambda t) dt$  tend vers une limite dont on déterminera la valeur.

b) Démontrer que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la série de terme général  $a_n I(n\lambda)$  est absolument convergente et calculer sa somme.

c) Soit  $\rho$  un nombre réel tel que  $\rho > 0$ . Démontrer qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que, quel que soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\text{on ait : } \left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n I(n\lambda) \right| \leq \left( \sum_{n=1}^N |a_n I(n\lambda)| \right) + \rho.$$

En déduire que, lorsque  $\lambda \rightarrow +\infty$ , l'intégrale  $J(\lambda)$  tend vers une limite dont on donnera l'expression en fonction de  $\int_a^b h(t) dt$ .

4) Les hypothèses sont celles de la question 3), soit  $q$  une fonction réelle de la variable réelle, périodique de période  $2\pi$ , et continue sur  $\mathbb{R}$ .

$$\text{Posons } \bar{q} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(t) dt \text{ et pour tout réel } \lambda, K(\lambda) = \int_a^b h(t) q(\lambda t) dt.$$

a) On fait l'hypothèse  $\bar{q} = 0$ . Etudier, pour tout réel  $t$  fixé, la limite lorsque  $\lambda \rightarrow +\infty$

de l'intégrale  $v_t(\lambda) = \int_0^t q(\lambda s) ds$  et en déduire la limite lorsque  $\lambda \rightarrow +\infty$  de l'intégrale  $K(\lambda)$ .

b) On ne fait plus l'hypothèse  $\bar{q} = 0$ . Etudier lorsque  $\lambda \rightarrow +\infty$  la limite de  $K(\lambda)$ .